

任意形状地质体非均匀磁化 磁异常B样条函数算法

姜效典 王硕儒

(青岛海洋大学地质系)

摘 要

姜效典, 王硕儒: 任意形状地质体非均匀磁化磁异常B样条函数算法, 《石油地球物理勘探》, 24 (3) 1989: 339~349

在磁测资料解释中, 形态复杂地质体非均匀磁化磁异常的正演计算一直是非常重要且有待解决的问题。本文以B样条函数的插值、求导、求积的性质为基础, 建立了B样条函数求解复杂地质体非均匀磁化磁异常的二维、三维问题的计算方法。理论模型计算表明: 该方法能够解决磁化率参数不均匀、形态任意地质体磁异常的正演问题, 且计算精度较高、令人满意。

关键词: 非均匀磁化 B样条函数 磁异常

ABSTRACT

Jiang Xiaodian and Wang Shuoru: Calculating the magnetic anomaly of arbitrarily-shaped geological body with nonuniform susceptibility by making use of B-spline function, OGP, 24 (3) 1989: 339~349

The calculation of magnetic anomaly of complex-shaped geological body with nonuniform susceptibility has been an important problem to be resolved in magnetic data interpretation. On the basis of interpolation, derivation and integral properties of B-spline function, we have developed the methods for calculating 2D and 3D magnetic anomalies of complex geological body with nonuniform susceptibility by making use of B-spline function. The theoretical modeling says that this method can be used to calculate magnetic anomaly of arbitrarily-shaped geological body with nonuniform susceptibility, the result being high-accurate and satisfying.

Key words: nonuniform susceptibility, B-spline function, magnetic anomaly

地质体磁异常的正演计算,除个别均匀的规则形体可写出计算公式外,大部分是无解析表达式的。然而,在实际工作中所遇到的主要是物性参数不均匀、形态复杂的地质体,因此解决这类问题就显得十分重要。二维问题可用有限元法计算^[1],但更普遍的三维问题目前还没有很好解决。本文提出的B样条函数法不仅可以解决这类二维问题,而且还可以解决三维问题。

随着计算机的发展,样条函数得到越来越广泛的应用。B样条函数应用于计算重磁异常的垂向导数效果较好^[2],笔者在此基础上将它应用于计算重磁异常,得到了令人满意的结果。

磁位及其边界条件

本文提出的求解方法是从解磁性体的磁位出发,得到磁位后,再用B样条函数求导法则获得磁异常强度。

众所周知,磁位 u 满足微分方程

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 4\pi \Delta \cdot \mathbf{J} & \text{在磁性体内部及边界} \\ \nabla^2 u = 0 & \text{在磁性体外部} \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{J}$ 为磁性体的磁化强度(包括感应磁化强度和剩余磁化强度)。式(1)中的 $u = u_i + u_r$ 是磁性体产生的磁位,不包括外部地磁场磁位 u_0 ,所以可认为磁位 u 满足的边界条件为

$$\begin{aligned} u_1|_{\tau} &= u_2|_{\tau} && \text{在有限磁荷密度界面}\tau\text{上} \\ u|_{\tau_{\infty}} &= 0 && \text{在无限磁荷密度界面}\tau_{\infty}\text{处} \end{aligned}$$

图1所示区域 Ω_1 为一形态任意的二度磁性体剖面,假定有一无穷远的边界 τ_{∞} 与地质体边界 τ 围成空间区域 Ω_2 ,该二度磁性体沿 y 轴无限延伸,磁化强度($\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, z)$)各处不等(包括大小和方向)。

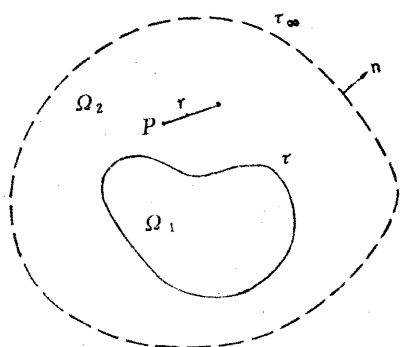


图1 二度磁性体示意图

在区域 Ω_2 中应用格林公式,有

$$\int_{\Omega_2} (u \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 u) d\Omega = \oint_{\tau} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau \quad (2)$$

以 r 表示 Ω_2 中某点 P 至任意点的距离(图1),可证 $\nabla^2 \varphi = \delta(P)$ ($\delta(P)$ 是以 P 点为中心的二维狄拉克函数)。令 $\varphi = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$,将 φ 代入式(2),得

$$\oint_{\tau} \left(u \frac{\cos \beta}{2\pi r} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau = \int_{\Omega_2} u \delta(P) d\Omega + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \nabla^2 u d\Omega$$

式中 β 是 $\mathbf{r}$ 与法向 $\mathbf{n}$ 的夹角。由于

所以
$$\oint_{\tau} d\tau = \int_1 d\tau + \int_{\tau_{\infty}} d\tau \quad u \propto \frac{1}{r} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\int_{\tau_{\infty}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau = 0$$

于是式(2)可化为

$$\int_{\Omega_2} u \delta(P) d\Omega + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \nabla^2 u d\Omega = - \int_{\tau_1} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau$$

由 δ 函数性质

$$\int_{\Omega_2} u \delta(P) d\Omega = \begin{cases} u(P) & P \text{ 点在区域 } \Omega_2 \text{ 内} \\ \frac{\omega}{2\pi} u(P) & P \text{ 点在区域 } \Omega_2 \text{ 的边界上} \end{cases}$$

其中 ω 是边界点的立体角。因此, 当 P 点在区域 Ω_2 内部时, 有

$$\int_{\Omega_2} u \delta(P) d\Omega = u(P) \quad \nabla^2 u = 0$$

于是可得到区域 Ω_2 内部 u 满足的积分方程

$$u(P) = - \int_{\tau_1} \left(u \frac{\cos \beta}{2\pi r} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau \quad (3)$$

当 P 点在区域 Ω_1 边界 τ_1 上时, 有

$$\int_{\Omega_1} u \delta(P) d\Omega = \frac{\omega}{2\pi} u(P) \quad \nabla^2 u = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{J}$$

于是, 由边界条件(1)可得区域 Ω_2 边界 τ_1 上 u 满足的积分方程

$$\frac{\omega}{2\pi} u(I) + 2 \int_{\Omega_1} \nabla \cdot \mathbf{J} \ln \frac{1}{r} d\Omega = \int_{\tau_1} \left(u \frac{\cos \beta}{2\pi r} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau \quad (4)$$

B 样条函数的概念、性质及运算⁽³⁾

样条函数为分段多项式函数, B 样条函数是指一类可以逼近 δ 函数的样条函数, 其节点既可以是等距的, 也可以是非均匀划分的, 它具有统一归整的运算公式, 较一般样条函数更具灵活性和适用性。

考虑到一、二阶样条函数光滑性差, 三次以上样条函数光顺性差, 本文均选用节点非等距的三次 B 样条函数, 其表达式为

$$N_{3,i}(x) = (x_{i+4} - x_i) G_{3,i}(x) \quad (5)$$

式中

$$G_{3,i}(x) = \sum_{j=i}^{i+4} w_{ij} (x_j - x)_+^3$$

$$w_{ij} = \prod_{l=i, l \neq j}^{i+4} \frac{1}{x_j - x_l}$$

$$(x_j - x)_+^3 = \begin{cases} (x_j - x)^3 & x \geq x_j \\ 0 & x < x_j \end{cases}$$

其积函数和导函数可统一写成

$$G_3^{(l)}(x_0 - x, \dots, x_4 - x) = \frac{3!}{(3-l)!} \sum_{j=0}^4 (-1)^l w_j G_{3-l}(x_j - x) \quad (6)$$

当 l 为正整数时, 式 (6) 表示 l 阶导函数; 当 l 为负整数时, 式 (6) 表示 l 次积函数; 当 l 等于零时, 式 (6) 为三次 B 样条函数本身。

解决形态任意地质体磁异常的计算问题, 多用二维或三维 B 样条函数, 它可表示为一维 B 样条函数的乘积形式, 即

$$\varphi_3(x, y, z) = N_{3, i_1}(x) N_{3, i_2}(y) N_{3, i_3}(z)$$

考虑到样条函数在计算中的适定性和收敛性, 只有在规则网格中才可以使用高维样条函数^[4], 本文选用了非等距节点的 B 样条函数, 使网格剖分变得更灵活了。

B 样条函数的求解方法

首先解边界上的积分方程 (4), 得到边界 τ_1 上的 u 和 $\partial u / \partial n$, 再代入积分方程 (3), 得到区域 Ω_2 内任一点的磁位 u 。显然, 解方程 (4) 需要计算区域积分

$$\int_{\Omega_1} \nabla \mathbf{J} \ln \frac{1}{r} d\Omega$$

和边界积分

$$\int_{\tau_1} \left(u \frac{\cos \beta}{2\pi r} + \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \right) d\tau$$

区域积分的计算

由于

$$\nabla \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

J_x, J_z 可由已知 $\mathbf{J}$ 求出。所以, 需求解 $\partial J_x / \partial x$ 和 $\partial J_z / \partial z$ 。将区域 Ω_1 分别用平行于 x 轴和 z 轴的直线剖分, 如图 2 所示。平行线间距是任意的, 对应于每一个网格点 i , 选用二维坐标 (i_1, i_2) , 引入样条函数 $\varphi_i(x, z) = N_{3, i_1}(x) N_{3, i_2}(z)$ 为基函数来逼近

$$J_{xi}(x, z) = \sum_i c_i \varphi_i(x, z) = \sum_i c_i N_{3, i_1}(x) N_{3, i_2}(z) \quad (7)$$

$j = 1, 2, \dots, N$, N 为区域 Ω_1 内及其边界 τ_1 上的网格点数。将式 (7) 对 x 求导, 有

$$\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} \right)_j = \sum_i c_i N'_{3, i_1}(x_i) N_{3, i_2}(z_j) \quad (8)$$

由于 N 个网格点上的磁化强度 J_x 已知, 利用式 (5) 可得到对于 N 个网格点上的所有 $N_{3, i_1}(x)$ 和 $N_{3, i_2}(z)$ 。代入式 (7) 可得到 $N \times N$ 阶线性代数方程组, 解之得

插值系数 $\{c_j\}$ 。再代入式(8), 利用式(6)计算出 $N_{3',i1}(x)$, 作矩阵乘积便获得 $\left\{\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}\right)_i\right\}$ 。同理, 可算得 $\frac{\partial J_z}{\partial z}$ 。

区域 Ω_1 的积分可分解为区域 Ω_1 中各个小矩形单元(图2)的积分之和, 即

$$\int_{\Omega_1} \nabla \mathbf{J} \ln \frac{1}{r} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{J} \ln \frac{1}{r} d\Omega$$

单元 e 的各角点坐标为 $(x_i, z_i), (x_i, z_{j+1}), (x_{i+1}, z_j), (x_{i+1}, z_{j+1})$ 。选用4点高斯二重积分式^[5], 令

$$x = x_i \xi_i + x_{i+1} \xi_j$$

$$z = z_i \xi_i + z_{j+1} \xi_j$$

在单元 e 内, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_x}{\partial x} = & \left(\frac{\partial J_x}{\partial x}\right)_{i,j} + \frac{\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial J_x}{\partial x}\right)_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + \\ & + \frac{\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}\right)_{i,j+1} - \left(\frac{\partial J_x}{\partial x}\right)_{i,j}}{z_{j+1} - z_j} (z - z_j) \end{aligned}$$

于是, 单元 e 的积分 P_i 为

$$\begin{aligned} P_i = \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{J} \ln \frac{1}{r} d\Omega = & \sum_{q_1=1}^4 \sum_{q_2=1}^4 w_{q_1} w_{q_2} \left[\frac{\partial J_x(x_{q_1}, z_{q_2})}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial J_z(x_{q_1}, z_{q_2})}{\partial z} \right] \ln \frac{1}{r(x_{q_1}, z_{q_2})} \cdot \Delta \end{aligned}$$

式中: w_{q_1}, w_{q_2} 分别为 x, z 相应的加权系数; Δ 为单元 e 的面积。4点高斯二重积分求积系数见表1。

边界积分的计算

边界积分可分解为边界 τ 上各单元积分之和。设边界单元两端节点编号为 j, k , 坐标为 $(x_j, z_j), (x_k, z_k)$ 。为便于积分运算, 单元中点的坐标写作

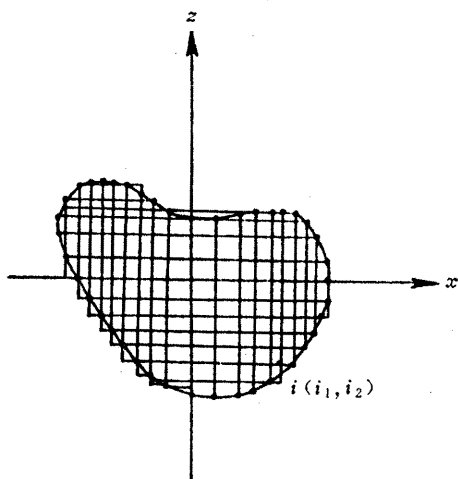
$$\begin{cases} x = x_j \xi_j + x_k \xi_k \\ z = z_j \xi_j + z_k \xi_k \end{cases}$$

假定在边界单元上, u 和 $\partial u / \partial n$ 均是线性变化, 即

$$u = u_j \xi_j + u_k \xi_k = [\xi_j \ \xi_k] \cdot \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \xi_j \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_j + \xi_k \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_k = [\xi_j \ \xi_k] \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_j \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_k \end{bmatrix}$$

所以

图 2 区域 Ω_1 的网格剖分

4 点高斯二重积分求积系数 表 1

q	$\xi_i(\eta_i)$	$\xi_j(\eta_j)$	$w_{q_1}(w_{q_2})$
1	0.069	0.930	0.173
2	0.330	0.669	0.326
3	0.669	0.330	0.326
4	0.930	0.069	0.173

$$\int_{\tau_e} u \frac{\cos \beta}{2\pi r} d\tau = \int_{\tau_e} [\xi_i, \xi_k] \frac{\cos \beta}{2\pi r} d\tau \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \end{bmatrix} = [f_{ij} \ f_{ik}] \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\int_{\tau_e} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} d\tau = \int_{\tau_e} [\xi_i, \xi_k] \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} d\tau \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k \end{bmatrix} = [d_{ij} \ d_{ik}] \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \int_{\tau_e} \xi_i \frac{\cos \beta}{2\pi r} d\tau & f_{ik} &= \int_{\tau_e} \xi_k \frac{\cos \beta}{2\pi r} d\tau \\ d_{ij} &= \int_{\tau_e} \xi_i \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} d\tau & d_{ik} &= \int_{\tau_e} \xi_k \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} d\tau \end{aligned}$$

式 (9) 和式 (10) 的积分仍选用 4 点高斯积分, 如

$$f_{ij} = \int_{\tau_e} \xi_i \frac{\cos \beta}{2\pi r} d\tau = \sum_{q=1}^4 \xi_i^{(q)} \frac{\cos \beta_q}{2\pi r_q} w_q l$$

式中: r_q 是节点 i 至单元 τ_e 上 q 点的距离; β_q 是 r_q 与单元 τ_e 法向之间的夹角; w_q 是加权系数; l 是边界单元 τ_e 的长度。

边界上各单元积分后再累加, 便得到

$$\int_{\tau} \left(u \frac{\cos \beta}{2\pi r} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau = [f_{i1} \cdots f_{iM}] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} + [d_{i1} \cdots d_{iM}] \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_M \end{bmatrix} \quad (11)$$

M 为边界 τ_1 上的节点总数。

由方向导数的性质可知

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial z} \sin \alpha$$

α 是边界单元 τ_i 与 x 轴之间的夹角, $\cos \alpha = (x_j - x_k) / [(x_j - x_k)^2 + (z_j - z_k)^2]^{-1/2}$ 。令

$$u = \sum_{j=1}^M c_j \varphi_j(x, z) = \sum_{j=1}^M c_j N_{3,j_1}(x) N_{3,j_2}(z) \quad (12)$$

于是, 有

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{j=1}^M c_j [N'_{3,j_1}(x) N_{3,j_2}(z) \cos \alpha + N_{3,j_1}(x) N'_{3,j_2}(z) \sin \alpha] \quad (13)$$

将式 (12) 和式 (13) 代入式 (11), 再与区域 Ω_1 的积分一并代入式 (4), 得

$$\frac{\omega}{2\pi} \cdot N \cdot C + 2P = F \cdot D \cdot C + D \cdot N'_x \cdot C \cdot \cos \alpha + D \cdot N'_y \cdot C \cdot \sin \alpha$$

解该线性代数方程组, 得插值系数 $\{c_j\}$, 代入方程式 (12) 和式 (13), 作矩阵乘积可求出 τ_1 上 M 个节点的磁位 u 和 $\partial u / \partial n$ 。再代入积分式 (3), 重复边界积分计算, 便可求得区域 Ω_2 中任意一点的磁位 u 。

由于磁位 u 与磁异常水平分量和垂直分量有如下关系

$$H_a = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad Z_a = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

所以, 由式 (12) 可得

$$H_a = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\sum_{j=1}^M c_j N'_{3,j_1}(x) N_{3,j_2}(z)$$

$$Z_a = -\frac{\partial u}{\partial z} = -\sum_{j=1}^M c_j N_{3,j_1}(x) N'_{3,j_2}(z)$$

可见, 在得到插值系数 $\{c_j\}$ 后, 可直接代入以上两式, 与样条函数的微分矩阵作乘积, 便可获得水平磁异常 H_a 和垂直磁异常 Z_a 。

任意形态三度体非均匀磁化磁异常的计算

三度地质体产生的磁位所满足的微分方程与二维相同, 积分方程的推导过程与二维相似, 只是令 $\varphi = -1/4\pi r$, 得到积分方程: P 点在区域 Ω_2 内时为

$$u(P) = -\int_{\tau} \left(u \frac{\cos \beta}{2\pi r} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau \quad (14)$$

P 点在边界 τ 上时为

$$\frac{\omega}{2\pi} u(P) - \int_{\Omega_1} \nabla \mathbf{J} \frac{1}{r} d\Omega = \int_{\tau} \left(u \frac{\cos \beta}{4\pi r^2} + \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{4\pi r} \right) d\tau \quad (15)$$

式中各符号的意义与二维情形相同。计算方法、步骤与二维相似, 所不同的是:

1. 在计算 $\int_{\Omega_2} \nabla \mathbf{J} \frac{1}{r} d\Omega$ 中选用三维 B 样条函数, 即令

$$J_x = \sum_j c_j \varphi_j(x, y, z) = \sum_j c_j N_{3,j_1}(x) N_{3,j_2}(y) N_{3,j_3}(z)$$

所以

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = \sum_j c_j N'_{3,j_1}(x) N_{3,j_2}(y) N_{3,j_3}(z)$$

同理, 可算得 $\partial J_y/\partial y$ 和 $\partial J_z/\partial z$ (这里, $\mathbf{J} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j} + J_z \mathbf{k}$)。于是, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{J} \frac{1}{r} d\Omega &= \sum_{q_1=1}^4 \sum_{q_2=1}^4 \sum_{q_3=1}^4 w_{q_1} w_{q_2} w_{q_3} \left[\frac{\partial J_x(x_{q_1}, y_{q_2}, z_{q_3})}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial J_y(x_{q_1}, y_{q_2}, z_{q_3})}{\partial y} + \frac{\partial J_z(x_{q_1}, y_{q_2}, z_{q_3})}{\partial z} \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{r(x_{q_1}, y_{q_2}, z_{q_3})} \cdot \Delta \end{aligned}$$

式中各符号的意义、数值同二维, 只是 Δ 表示小单元体 e 的体积。

2. 在边界积分 $\int_{\tau} \left(u \frac{\cos \beta}{4\pi r^2} + \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{4\pi r} \right) d\tau$ 中, 对边界 τ 用三角单元剖分, 将该

积分看作每个单元的积分和, 各单元认作平面, 令

$$\begin{cases} x = x_j \xi_j + x_k \xi_k + x_m \xi_m \\ y = y_j \xi_j + y_k \xi_k + y_m \xi_m \\ z = z_j \xi_j + z_k \xi_k + z_m \xi_m \end{cases}$$

节点 (x_j, y_j, z_j) , (x_k, y_k, z_k) , (x_m, y_m, z_m) 为单元 e 的三个顶点坐标。设在边界单元 τ_e 内, u 和 $\partial u/\partial n$ 均呈线性变化, 即

$$u = u_j \xi_j + u_k \xi_k + u_m \xi_m = [\xi_j \ \xi_k \ \xi_m] \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_j \xi_j + \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_k \xi_k + \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_m \xi_m = [\xi_j \ \xi_k \ \xi_m] \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_j \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_k \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_m \end{bmatrix}$$

于是, 有

$$\int_{\tau_e} u \frac{\cos \beta}{4\pi r^2} d\tau = [f_{ij} \ f_{ik} \ f_{im}] \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \\ u_m \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\int_{\tau_e} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{4\pi r} d\tau = [d_{ij} \ d_{ik} \ d_{im}] \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_j \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_k \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_m \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中

$$f_{ij} = \int_{\tau_e} \xi_j \frac{\cos \beta}{4\pi r^2} d\tau \quad d_{ij} = \int_{\tau_e} \xi_j \frac{1}{4\pi r} d\tau$$

其它类同。

式(16)和式(17)的积分选7点高斯求积公式^[5]

$$\int_{\tau_e} \xi_j \frac{\cos \beta}{4\pi r^2} d\tau = \sum_{q=1}^7 \xi_j^{(q)} \frac{\cos \beta_q}{4\pi r_q^2} w_q \Delta$$

$$\int_{\tau_e} \xi_j \frac{1}{4\pi r} d\tau = \sum_{q=1}^7 \xi_j^{(q)} \frac{1}{4\pi r_q} w_q \Delta$$

式中: r_q 是边界单元 τ 上某点 i 至三角元上任一点 q 的距离; β_q 是 r_q 与三角元法向的夹角; w_q 是加权系数; Δ 是三角元的面积。7点高斯积分求积系数见表2。

七点高斯积分求积系数

表 2

q	$\xi_j^{(q)}$	$\xi_k^{(q)}$	$\xi_n^{(q)}$	w_q
1	0.333	0.333	0.333	0.225
2	0.797	0.101	0.101	0.129
3	0.101	0.797	0.101	0.129
4	0.101	0.101	0.797	0.129
5	0.059	0.470	0.470	0.132
6	0.470	0.059	0.470	0.132
7	0.470	0.470	0.059	0.132

综合上述计算, 代入方程式(15), 有

$$\frac{\omega}{2\pi} u - P = F \cdot u + D \frac{\partial u}{\partial n} \quad (18)$$

令

$$u = \sum_i c_i \varphi_i(x, y, z) = \sum_i c_i N_{3,i_1}(x) N_{3,i_2}(y) N_{3,i_3}(z) \quad (19)$$

由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

其中

$$\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \left\{ \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right\}$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_i c_i \left[N'_{3,i_1}(x) N_{3,i_2}(y) N_{3,i_3}(z) \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + N_{3,j_1}(x)N'_{3,j_2}(y)N_{3,j_3}(z)\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \\
 & + N_{3,j_1}(x)N_{3,j_2}(y)N'_{3,j_3}(z)\frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \Big] \quad (20)
 \end{aligned}$$

将式 (19) 和式 (20) 代入式 (18), 有

$$\frac{\omega}{2\pi}N \cdot C - P = F \cdot N \cdot C + D(N'_x \cos \alpha + N'_y \cos \beta + N'_z \cos \gamma)C$$

求解上式, 得插值系数 $\{c_i\}$, 其余步骤均同二维。作同样处理, 便可得到三度地质体在空间区域任意一点的磁位 u 。由于磁异常的各个分量与磁位有如下关系

$$H_{ax} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad H_{ay} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad Z_a = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

所以, 由式 (19) 作样条微分并与插值系数相乘, 可得到磁异常的各个分量, 即

$$H_{ax} = -\sum_j c_j N'_{3,j_1}(x)N_{3,j_2}(y)N_{3,j_3}(z)$$

$$H_{ay} = -\sum_j c_j N_{3,j_1}(x)N'_{3,j_2}(y)N_{3,j_3}(z)$$

$$Z_a = -\sum_j c_j N_{3,j_1}(x)N_{3,j_2}(y)N'_{3,j_3}(z)$$

模 型 试 算

为验证本文所述方法的有效性及其精度, 笔者编制了程序, 对理论模型作了试算。

图 3 为理论模型, 图 4 为图 3 模型所产生的垂直磁异常 Z_a 曲线。图 4 中点划线表示用该图中组合的椭圆柱体作近似退磁, 先算出各部分的平均磁化强度, 然后算出各自的垂直磁异常, 再叠加而成的结果; 实线表示用 B 样条函数计算的结果。显然, 两种算法的计算结果比较吻合,

相对误差均在 13% 以内。 B 样条函数的计算, 选择单元 358 个, 边界节点 122 个, 测线计算节点 50 个, 在 MV-6000 超小型机上运算时间近 6min。用组合椭圆柱体计算时, 需要考虑退磁作用, 模型的形状对退磁计算影响很大, 所以笔者是在参考样条函数计算结果之后确定椭圆柱体的形状和大小的。可见, 用本文所述方法进行计算比较合理, 因为它既考虑了非均匀性的影响, 又处理了相互间的磁化作用。

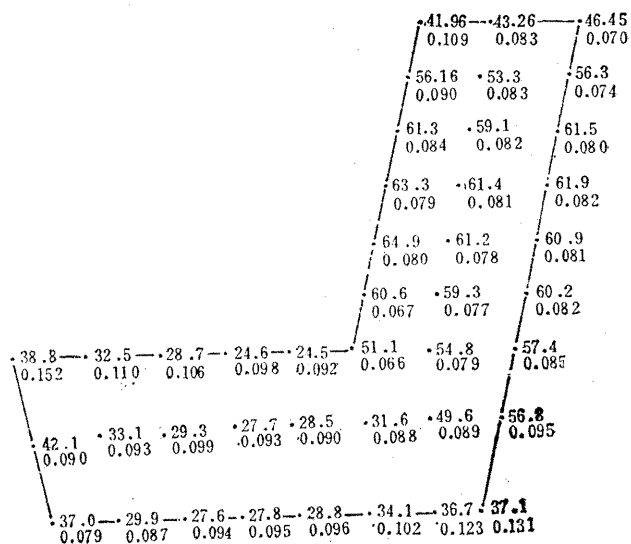
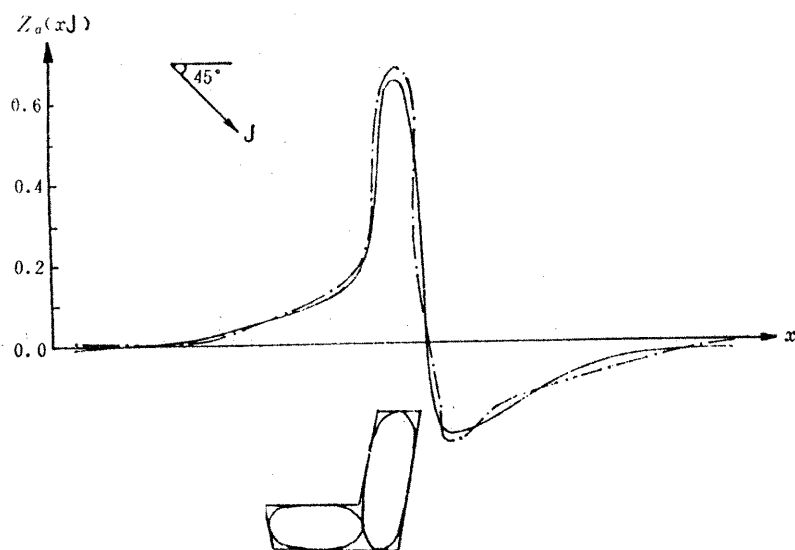


图 3 理论模型

图 4 据图 3 模型计算的 Z_0 曲线

结 束 语

本文的理论推导、模型计算都表明：用 B 样条函数方法求解密度参数不均匀、形状不规则的地质体磁异常的正演计算，具有原理简单、程序易编制、通用性强（二维或三维问题无大的差别）、计算效果好等特点，而计算量大、准备工作繁琐是其不足之处。

参 考 文 献

- [1] 徐世浙：用有限元法计算二维重力场垂直分量及重力位二阶导数，《石油地球物理勘探》，（5）1984：468~476
- [2] 王硕儒等：用 B 样条函数计算位场垂向高阶导数，《石油物探》，26（2）1987：105~115
- [3] 李岳生等：《样条函数方法》，科学出版社，1979
- [4] 孙家旭：《样条函数与计算几何》，科学出版社，1982
- [5] 曹立凡，史万明：《数值分析》，北京工业出版社，1986