# 用有限元法计算二维重力场垂直分量及重力位二阶导数

徐世浙


## 摘　　要

有限元法可以计算密度分布、形态复杂物体的重力场垂直分量 $g$ 及重力位二阶导数 $w_{xy}$、$w_{yy}$。

取一个包围密度体的足够大的区域，求解 $g$ 的边值问题可表为

$$\begin{cases} \nabla^2 g = -4\pi K \dfrac{\partial \rho}{\partial y} & \text{在区域内} \\ \dfrac{\partial g}{\partial n} + \dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta} g = 0 & \text{在边界上} \end{cases}$$

与上述边值问题相应的变分问题是泛函

$$F(g) = \iint_\Omega \left[\frac{1}{2}(\nabla g)^2 + 4\pi K \frac{\partial g}{\partial y}\rho\right] dS + \oint_\Gamma \frac{1}{2} \frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta} g^2 dl$$

取极值。用有限元解上述变分问题时，将区域 $\Omega$ 剖分为三角单元，在单元 $e$ 内进行二次函数插值。首先计算各单元的 $F_e(g)$，然后相加组成总体的 $F(g)$，它是各节点待求的 $g$ 的函数。对 $F(g)$ 求极值，得一线性代数方程组。解方程组可得各节点的 $g$。对 $g$ 进行微商，即可得重力位二阶导数。

## ABSTRACT

Density distribution, vertical component $g$ of gravitational field of a complex form object and second derivative $w_{xy}$, $w_{yy}$ of gravitational potential can be calculated by finite element method.

Taking a sufficient large area that is surrounding the density body, the boundary value of $g$ can be expressed as follows

$$\begin{cases} \nabla^2 g = -4\pi K \dfrac{\partial \rho}{\partial y} & \text{within the area} \\ \dfrac{\partial g}{\partial n} + \dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta} g = 0 & \text{at the boundary} \end{cases}$$

The calculus of variations corresponding to the above boundary value will be to get the extreme value by functional analysis

$$F(g)=\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}(\nabla g)^{2}+4\pi K\frac{\partial g}{\partial y}\rho\right]ds+\oint_{\Gamma}\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta}g^{2}dl$$

When the calculus of varions described above is solved by finite element method, the area $\Omega$ is seperated into triangular elements and second functional interpolation is performed in element $e$. $F_e(g)$ of each element is calculated first, then added together to get total $F(g)$ which is the function of $g$ to be calculated for each node. Taking the extreme value of $F(g)$, a linear algebraic equation is derived; $g$ of each node can be derived by solving the equation; after taking numerical derivative for $g$, second derivative of gravitational potential can be obtained.

重力异常的正演与其它物探方法的正演比较，要简单一些，通常用积分法或量板法就可以完成。目前，有限元法正在迅速发展，它具有高效、通用的特点。本文提出一种计算二维重力场的有限元法，它可计算密度分布复杂、形态复杂的物体的重力场的垂直分量及重力位的二阶导数。

## 原　　理

大家知道，重力位 $w$ 满足泊松方程

$$\nabla^{2}w=4\pi K\rho$$

其中 $K$ 是引力常数，$\rho$ 是密度差。对上式在垂向（$y$ 方向）求导，并交换求偏导的顺序，有

$$\nabla^{2}\frac{\partial w}{\partial y}=4\pi K\frac{\partial\rho}{\partial y}$$

因为重力场垂直分量 $g$ 是位在 $y$ 方向的负梯度

$$g=-\frac{\partial w}{\partial y}$$

所以 $g$ 应满足的偏微分方程为

$$\nabla^{2}g=-4\pi K\frac{\partial\rho}{\partial y}$$

如果给定区域 $\Omega$ 上 $\rho$ 的分布以及边界 $\Gamma$ 上重力场垂直分量 $g$ 的某类边界条件，例如第三类边界条件

$$\frac{\partial g}{\partial n}+\alpha g=\beta$$

其中 $n$ 是边界的外法向，$\alpha$、$\beta$ 是某已知函数，则求解区域内的 $g$ 等于解下列边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 g + 4\pi K \dfrac{\partial \rho}{\partial y} = 0 & \text{在区域}\ \Omega\ \text{上} \\ \dfrac{\partial g}{\partial n} + \alpha g = \beta & \text{在边界}\ \Gamma\ \text{上} \end{cases} \tag{1}$$

从式（1）解出 $g$ 后，经适当微分运算，即可求得重力位的二阶导数

$$w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} \qquad w_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\partial g}{\partial y}$$

用有限元法求式（1），首先得建立与式（1）相适应的变分问题。为此，我们在区域 $\Omega$ 上构造泛函

$$I(g) = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\nabla g)^2 + 4\pi K \frac{\partial g}{\partial y} \rho \right] dS \tag{2}$$

其变分为

$$\delta I(g) = \iint_{\Omega} \left[ (\nabla g \cdot \nabla \delta g) + 4\pi K \frac{\partial \delta g}{\partial y} \rho \right] dS \tag{3}$$

根据格林公式

$$\iint_{\Omega} (\nabla \phi \cdot \nabla \psi) dS = -\iint_{\Omega} \nabla^2 \phi \cdot \psi dS + \oint_{\Gamma} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl$$

式中 $\Gamma$ 为区域 $\Omega$ 的边界，$n$ 是边界的外法向。令

$$\phi = g \qquad \psi = \delta g$$

式（3）的第一项积分可写成

$$\iint_{\Omega} (\nabla g \cdot \nabla \delta g) dS = -\iint_{\Omega} \nabla^2 g \cdot \delta g dS + \oint_{\Gamma} \delta g \frac{\partial g}{\partial n} dl \tag{4}$$

再由于

$$\frac{\partial \delta g}{\partial y} \rho = \frac{\partial}{\partial y} (\delta g \cdot \rho) - \delta g \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

以及

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} (\delta g \cdot \rho) dS = -\oint_{\Gamma} \delta g \cdot \rho dx$$

式（3）的第二项变为

$$4\pi K \iint_{\Omega} \frac{\partial \delta g}{\partial y} \rho dS = -4\pi K \iint_{\Omega} \delta g \frac{\partial \rho}{\partial y} dS - 4\pi K \oint_{\Gamma} \delta g \rho dx \tag{5}$$

将式（4）、(5) 代入（3)，得

$$\delta I(g) = -\iint_{\Omega} \left( \nabla^2 g + 4\pi K \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \delta g dS + \oint_{\Gamma} \delta g \frac{\partial g}{\partial n} dl + 4\pi K \oint_{\Gamma} \delta g \rho dx \tag{3'}$$

根据式（1），在区域 $\Omega$ 内，有

$$\nabla^2 g + 4\pi K \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

所以式(3′)右侧第一项积分为 0。我们在用有限元计算重力场时，通常将边界 $\Gamma$ 选在远离密度体的地方，那里的 $\rho=0$，于是式（3′）右侧最后一项积分也为零。将边界上的

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\alpha g + \beta$$

代入式(3′)右侧第二项积分中，得

$$\delta I(g) + \oint_\Gamma (\alpha g - \beta)\delta g dl = \delta\left[I(g) + \oint_\Gamma \left(\frac{1}{2}\alpha g^2 - \beta g)\right)\right]dl = 0$$

再将式(2)代入上式，得

$$\delta\left\{\iint\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}(\nabla g)^2 + 4\pi K \frac{\partial g}{\partial y}\rho\right] dS + \oint_\Gamma \left(\frac{1}{2}\alpha g^2 - \beta g\right) dl\right\} = 0$$

所以边值问题式(1)与变分问题

$$E(g) = \iint\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}(\nabla g)^2 + 4\pi K \frac{\partial g}{\partial y}\rho\right] dS + \oint_\Gamma \left(\frac{1}{2}\alpha g^2 - \beta g\right) dl \tag{6}$$

取极值等价。

应当指出，第三类边界条件

$$\frac{\partial g}{\partial n} + \alpha g = \beta$$

中的 $\alpha$、$\beta$ 实际上是未知的，但我们可用如下方法作近似处理。将区域的边界 $\Gamma$ 取得足够远，这时场源对边界的影响可近似看作质量集中于截面质心处的质线的影响。于是，边界 $\Gamma$ 上的重力场垂直分量可按质线公式计算

$$g = \frac{c\sin\theta}{r}$$

其中 $c$ 是常数，$r$ 是质心至边界点的距离，$\theta$ 为 $r$ 与水平线的夹角（图 1）。

对上式求偏导，得

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{c\sin(\theta-\alpha)}{r^2}$$

其中 $\alpha$ 是法线方向 $\vec{n}$ 与矢径 $\vec{r}$ 的夹角。

因为

$$c = \frac{rg}{\sin\theta}$$

所以

$$\frac{\partial g}{\partial n} + \frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta} g = 0$$

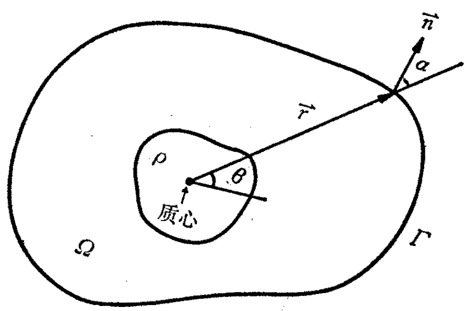


图 1　计算边界上重力垂直分量原理图

可见，在边界 $\Gamma$ 上有

$$\alpha=\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta}\qquad\qquad \beta=0$$

所以变分式（6）变成

$$F(g)=\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}(\nabla g)^2+4\pi K\frac{\partial g}{\partial y}\rho\right]dS+\oint_{\Gamma}\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta}g^2dl \tag{7}$$

的取极值问题，下面我们将用有限元法求解变分问题式（7）。

## 有 限 元 法

将区域 $\Omega$ 剖分成许多小单元 $e$，在各单元上用适当的函数插值，计算各单元的 $F_e(g)$，然后相加组成总体的 $F(g)$，再对 $F(g)$ 求极值，可得各节点的 $g$。

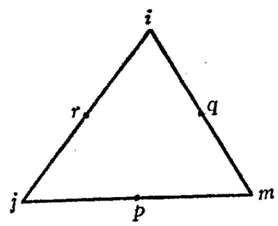

图 2 一个角三单元上取 6 个节点

本文采用三角单元，在单元内进行二次函数插值。为此，在单元上取 6 个点，三个角点和三边中点，如图 2 所示。6 个点的编号为 $i$，$j$，$m$，$p$，$g$，$r$，其 $g$ 值分别为 $g_i$，$g_j$，$g_m$，$g_p$，$g_q$，$g_r$，角点坐标为 $(x_i,\ y_i)$，$(x_j,\ y_j)$，$(x_m, y_m)$，于是单元 $e$ 内的 $g$ 可表示为[1]

$$g=N_ig_i+N_jg_j+N_mg_m+N_pg_p+N_qg_q+N_rg_r=[N]_e\{g\}_e \tag{8}$$

其中

$$\left\{\begin{array}{l}
\{g\}_e=\{g_i,g_j,\cdots,g_r\}^T\ \text{是单元 } g \text{ 的列向量}\\
[N]_e=[N_i,N_j,\cdots,N_r]\ \text{是单元的形函数}\\
N_i=(2L_i-1)L_i,\qquad N_p=4L_jL_m\\
N_j=(2L_j-1)L_j,\qquad N_q=4L_mL_i\\
N_m=(2L_m-1)L_m,\qquad N_r=4L_iL_j\\
L_i=\dfrac{1}{2\Delta}(a_ix+b_iy+c)\\
L_j=\dfrac{1}{2\Delta}(a_jx+b_jy+c)\\
L_m=\dfrac{1}{2\Delta}(a_mx+b_my+c)\\
a_i=y_j-y_m,\qquad a_j=y_m-y_i,\qquad a_m=y_i-y_j\\
b_i=x_m-x_j,\qquad b_j=x_i-x_m,\qquad b_m=x_j-x_i\\
c_i=x_jy_m-x_my_i,\quad c_j=x_my_i-x_iy_m,\quad c_m=x_iy_j-x_jy_i\\
\Delta=\dfrac{1}{2}(a_ib_j-a_jb_i)\ \text{是三角元的面积}
\end{array}\right. \tag{9}$$

因为 $N_s(s=i,\ j,\ \cdots,\ r)$ 是二次函数，且满足

$$\left\{\begin{array}{ll}
N_s=1 & \text{在节点 } s\\
N_s=0 & \text{在其它节点}
\end{array}\right. \tag{10}$$

的条件，所以函数式（8）是二次函数，在 6 个节点满足指定的 $g$ 值。

利用式（8）、（9），很容易对单元 $e$ 计算式（7）右侧的第一项面积分。经适当运算，有

$$\iint_e \frac{1}{2}(\nabla g)^2 dS = \frac{1}{2}\{g\}_e^T[K_1]_e\{g\}_e \tag{11}$$

其中

$$[K_1]_e = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \frac{a_i^2+b_i^2}{4} & & & \text{对} & & \\ \frac{A}{12} & \frac{a_j^2+b_j^2}{4} & & & & \\ \frac{B}{12} & \frac{C}{12} & \frac{a_m^2+b_m^2}{4} & & & \text{称} \\ 0 & \frac{C}{3} & \frac{C}{3} & \frac{2}{3}D & & \\ \frac{B}{3} & 0 & \frac{B}{3} & \frac{2}{3}A & \frac{2}{3}E & \\ \frac{A}{3} & \frac{A}{3} & 0 & \frac{2}{3}B & \frac{2}{3}C & \frac{2}{3}F \end{bmatrix}$$

式中：$A = a_i a_j + b_i b_j$；$B = a_i a_m + b_i b_m$；$C = a_j a_m + b_j b_m$；$D = a_j^2 - a_i a_m + b_j^2 - b_i b_m$；

$E = a_m^2 - a_i a_j + b_m^2 - b_i b_j$；$F = a_i^2 - a_m a_j + b_i^2 - b_m b_j$。

设三角元 $e$ 内的密度 $\rho$ 是常量，经适当计算，式（7）右侧第二项面积分为

$$\iint_e 4\pi K \frac{\partial g}{\partial y}\rho dS = \{g\}_e^T[p]_e \tag{12}$$

其中 $[\rho]_e = \frac{1}{6}4\pi K\rho[b_i,\ b_j,\ b_m, -4b_i, -4b_j, -4b_m]^T$

式（7）右侧第三项积分只对边界单元进行，设线段 $jm$ 落在边界上，用 $l_i$ 代表 $jm$ 的的长度。由于边界离质心较远，$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta}$ 可近似看作常量，提到积分号外面，于是

$$\frac{1}{2}\oint_{jm}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta}g^2 dl = \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta}\oint_{jm} g^2 dl$$

$$= \frac{1}{2}\{g\}_e^T[K_2]_e\{g\}_e \tag{13}$$

其中

$$[K_2]_e=\frac{\sin(\theta-\alpha)}{30r\sin\theta}l_i\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&4&-1&2&0&0\\0&-1&4&2&0&0\\0&2&2&16&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由式（11）、（12）、（13）得单元 $e$ 中的积分

$$F_e(g)=\frac{1}{2}\{g\}_e^T[K_1]_e\{g\}_e+\frac{1}{2}\{g\}_e^T[K_2]_e\{g\}_e+\{g\}_e^T[p]_e$$

上式右端第二项，只有边界单元才有贡献。

将各单元的 $F_e(g)$ 叠加，得总体的 $F(g)$

$$F(g)=\frac{1}{2}\{g\}^T[K_1]\{g\}+\frac{1}{2}\{g\}^T[K_2]\{g\}+\{g\}^T[p]$$

其中：$\{g\}$是全体节点的 $g$ 组成的列向量；$[K_1]$是各单元的矩阵$[K_1]_e$扩展后之和；$[K_2]$是各边界单元的矩阵$[K_2]_e$扩展后之和；$[K_1]$、$[K_2]$是正定、稀疏、对称矩阵；$[p]$是各单元的矩阵$[p]_e$扩展后之和。$[K_1]$、$[K_2]$和$[p]$取决于密度 $\rho$ 的分布和节点的分布。在这些因素取定后，$F(g)$是$\{g\}$的函数。考虑到$[K_1]$、$[K_2]$的对称性，由泛函 $F(g)$ 取极值，可得线性方程组

$$\{[K_1]+[K_2]\}\{g\}=-[p]$$

解这个线性方程，可得各节点的 $g$。

## 重力位二阶导数

求得各节点的重力场垂直分量后，重力位的二阶导数 $w_{xy}$ 和 $w_{yy}$ 可由下列公式求得。由式（8），有

$$w_{xy}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x}=-\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]_e\{g\}_e=-\left[\frac{\partial N_i}{\partial x},\frac{\partial N_j}{\partial x},\cdots,\frac{\partial N_r}{\partial x}\right]_e\{g\}_e$$

$$w_{yy}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{\partial g}{\partial y}=-\left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]_e\{g\}_e=-\left[\frac{\partial N_i}{\partial y},\frac{\partial N_j}{\partial y},\cdots,\frac{\partial N_r}{\partial y}\right]_e\{g\}_e$$

由式（9），（10）得单元 $e$ 各节点的重力位二阶导数

$$\begin{Bmatrix}(w_{xy})_i\\(w_{xy})_j\\(w_{xy})_m\\(w_{xy})_p\\(w_{xy})_q\\(w_{xy})_r\end{Bmatrix}=-\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix}3a_i&-a_j&-a_m&0&4a_m&4a_j\\-a_i&3a_j&-a_m&4a_m&0&4a_i\\-a_i&-a_j&3a_m&4a_j&4a_i&0\\-a_i&a_j&a_m&-2a_i&2a_i&2a_i\\a_i&-a_j&a_m&2a_j&-2a_j&2a_j\\a_i&a_j&-a_m&2a_m&2a_m&-2a_m\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}g_i\\g_j\\g_m\\g_p\\g_q\\g_r\end{Bmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix}(w_{yy})_i\\(w_{yy})_j\\(w_{yy})_m\\(w_{yy})_p\\(w_{yy})_q\\(w_{yy})_r\end{pmatrix}=-\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix}3b_i & -b_j & -b_m & 0 & 4b_m & 4b_j\\-b_i & 3b_j & -b_m & 4b_m & 0 & 4b_i\\-b_i & -b_j & 3b_m & 4b_j & 4b_i & 0\\-b_i & b_j & b_m & -2b_i & 2b_i & 2b_i\\b_i & -b_j & b_m & 2b_j & -2b_j & 2b_j\\b_i & b_j & -b_m & 2b_m & 2b_m & -2b_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_i\\g_j\\g_m\\g_p\\g_q\\g_r\end{pmatrix}$$

对于相邻单元的公共节点，则利用各单元求得的该节点的重力位二次导数的平均值，作为该点的重力位二阶导数。

## 例　　子

图 3 是一个有限元计算所用的区域剖分示意图。图 4 和图 5 是用该剖分计算的重力异常。图 4 中的物体是正方体，密度差 $\rho=1$克/厘米$^3$。为了检验本方法的有效性，在图 4 上我们还画出按水平质线（位于柱体中心）理论公式计算的重力异常，如图中实线所示，有限元的计算结果如点子所示。可以看出，用有限元法计算的 $g$ 是十分满意的，误差<2%，但二次导数有较大误差，一般为百分之几，个别高达 30%。误差的原因是：1）插值函数的次数不够高；2）单元剖分尚嫌过大。我们用的是CROMEMCO S－3微处理机，因容量有限，单元不能分的太小。如果计算机容量允许，将单元进一步剖

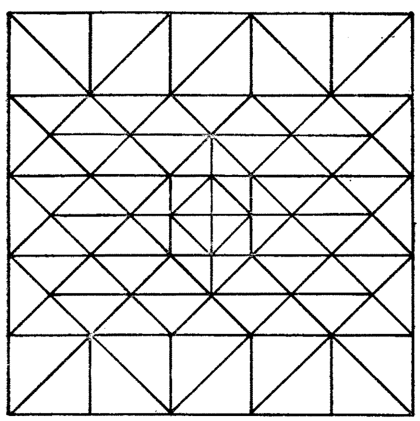

图 3　区域剖分示意图

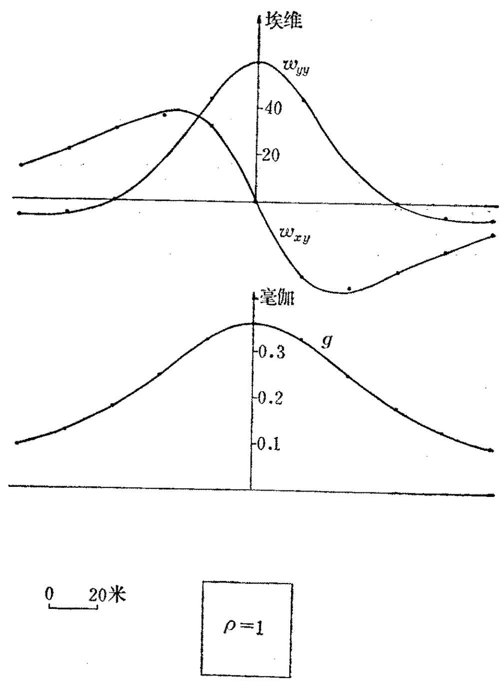


图 4　正方体剖分计算的重力异常

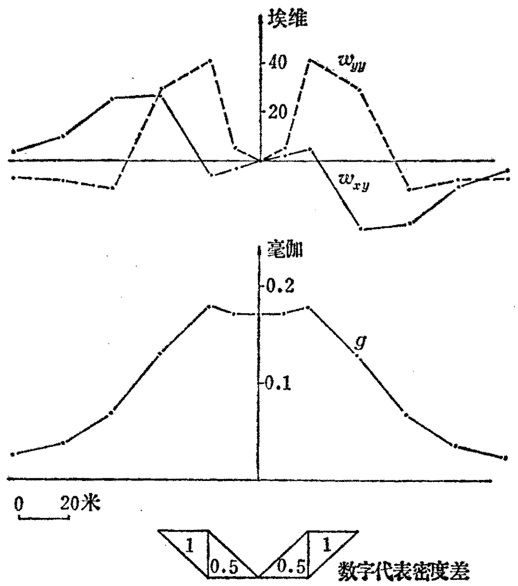

图 5 复杂形体剖分计算的重力异常

分，有可能降低二次导数的计算误差。

有限元法的最大特点是能计算形状任意、密度任意（分块均匀）物体的重力异常。在网格不变的情况下，只要将各单元的密度值输入计算机，很快就能算出整个空间的重力异常。图 5 是在图 3 的网格上填入适当的密度值后计算的重力异常。

应当指出，在本方法中，用于有限元计算的区域Ω不需取得很大。计算结果表明，区域的线度约为物体线度的 5 倍即可，在有限元计算中，用到质心的位置，但质心位置不需定得很准。计算结果表明，质心位置的误差在物体线度10％范围内，对计算结果影响不大。

## 参考文献

朱伯方，《有限单元法原理与应用》，水利电力出版社，1979